

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

REKENAFDELING

R 340

(ZW 1956-12)

Een maximum probleem.

door

Prof. Dr. Ir. A. van Wijngaarden

en

J. Verhoeff



[1956]

Een maximum probleem

Het hier volgende maximum probleem komt voor in de confectie industrie. We zullen eerst dat gedeelte van het fabricage proces dat nodig is om de probleemstelling te begrijpen in het kort beschrijven.

Per seizoen komen orders binnen over verschillende maten en modellen. Laten wij aannemen dat van een bepaald model en een bepaalde maat b.v. herencostuums maat 48, 1000 stuks moeten worden vervaardigd. Voor deze 1000 costuums kan hetzelfde standaard patroon worden gebruikt. Zij zullen echter niet allen van dezelfde stof moeten worden gemaakt. De meest voorkomende dessins zijn: effen, vleug effen, streep en vleug-streep. Een vleug-stof is een stof welke niet in alle richtingen dezelfde eigenschappen heeft, b.v. doordat de gloed of kleur van verschillende kanten bekeken anders is. Wanneer men het patroon uit een dergelijke stof wil snijden, moeten de verschillende onderdelen zoals b.v. de broekspijpen in dezelfde richting worden gelegd. Het ligt dus voor de hand dat men dan het patroon minder zuinig neer kan leggen dan bij een effen stof. Bij een streepstof is er een complicatie van andere aard. Hier moet b.v. zorg gedragen worden dat de streep langs de revers loopt en de streep bij de rugnaad gelijk uitkomt. Bij een stof die zowel een streep als een vleug vertoont, zal men met beide factoren rekening moeten houden. Daar het niet praktisch is om de verschillende onderdelen van het patroon voor elk costuum afzonderlijk uit te leggen, doet men dit eens en voor altijd op een kartonnen rol. De contouren van het patroon worden door uitgepuste gaatjes aangegeven. Deze kan dan op de stof worden gelegd en door krijgt over de rol te strijken wordt door een stippe lijn het patroon op de stof aangegeven. Ook dit doet men niet met elk costuum afzonderlijk maar alleen met het bovenste van een stapel van ca 20 stuks. Als de rol dus 2.80 lang is krijgt men een stapel 2.80 lang en 20 lagen dik met het patroon op het bovenste stuk stof. In de snijkamer wordt met een soort lint-mes de gehele stapel tegelijk uitgesneden.

Men zou kunnen volstaan met een rol welke "afgestemd" is op een vleug-streep stof; dan is immers met alle bovenvermelde complicaties rekening gehouden, maar men zal uiteraard op afval bezuinigen wanneer men meerdere rollen maakt, voor de verschillende dessins afzonderlijk. Zo geeft b.v. een rol voor streep-stof een bezuiniging van 0,7%; voor vleug-stof van 1,4% en voor een effen stof zelfs van 2,1%. Dit is ^{MAUSCH} een uit de praktijk gebleken gemiddelde.

Wij zijn er hier van uitgegaan dat de breedte van de stof altijd

even groot is. Dit is echter niet het geval. Hoewel de stoffen "officieel" (dubbel genomen) 71 cm breed zijn, blijkt het bij de fabricatie ervan niet mogelijk dit te verwezenlijken. De regeling bestaat dat de afnemer stoffen beneden deze breedte mag weigeren. De wevers moeten dus wat boven de 71 cm mikken, zodat dus b.v. stoffen van 73 cm het meest voorkomen:

1,6%	71 cm breed	36,8%	74 cm breed
15,6%	72 cm breed	13,4%	75 cm breed
28,3%	73 cm breed	3,9%	76 cm breed

Er ligt hier een bezuinigingsmogelijkheid door het patroon nog eens spart in te tekenen op een bredere rol. Dit geeft gemiddeld een bezuiniging van 1,4% voor elke cm die de rol breder is. Daar het maken van een rol voor een bepaald dessin en bepaalde breedte een werk ineens is, lijkt het aangewezen om eenvoudig weg 24 rollen per maat en model te maken (6 breedtes en 4 dessins). Maar wij moeten hier oppassen. Wij lopen nl. de kans dat wij dan geen pak met 20 stuks krijgen, zodat de snijkamertijd, welke eerst $(1000:20) \times 20 \text{ min.} = 16\frac{2}{3} \text{ uur}$ bedraagt, vergroot zal worden, en dit kan duurder uitkomen dan de stofbesparing.

Om een concreet voorbeeld te geven: stel dat wij slechts 2 costumes kunnen optrekken op 76 effen, dan zouden deze 2 costumes 20 min. snijkamer kosten, dat is $\pm f 1,-$, terwijl als wij deze meesneden met een pak 75 cm streep, dan zou het stofverlies $\pm f 0,60$ bedragen. Men kan dus afhankelijk van het aantal bestelde costumes van tevoren bepalen hoeveel verschillende rollen men denkt te kunnen gebruiken zonder de snijkamer-kosten sterk te vergroten.

De vraag is nu eenvoudig weg deze: welke rollen dan te kiezen. Men moet hierbij goed in het oog houden, dat een rol met breedte x nooit op een stof met een breedte $< x$ kan worden gelegd. Dit is ~~om het in de lucht snijden te voorkomen~~. Ook mag een rol bestemd voor een bepaald dessin nooit op een gecompliceerder dessin worden gelegd, dus geen effen rol op een vleug^{of}-streep-stof, en ook geen streep-(of vleug-)rol op een vleug-streep-stof

MATHEMATISCHE FORMULERING

Zij gegeven een verzameling V van punten welke wij aanduiden met 3 coördinaten (x,y,z) . x doorloopt de waarden $0,1,\dots,5$ (corresponderend met de 6 verschillende breedten), terwijl y en z 0 of 1 zijn.

- 0 0 = vleug streep
- 0 1 = streep
- 1 0 = vleug effen
- 1 1 = effen

In totaal hebben wij dus 24 punten E_1 . Deze zijn partitieel geordend en wel

$$E_1(x_1, y_1, z_1) \geq E_2(x_2, y_2, z_2)$$

dan en slechts dan als $x_1 \geq x_2$ en $y_1 \geq y_2$ en $z_1 \geq z_2$.

Het volgende schema geeft de ordenings relatie weer

		$f(E)$ in %					
$y \setminus x$		0	1	2	3	4	5
00	9	46	70	104	41	2	
01	2	20	20	43	21	4	
10	4	32	54	74	14	2	
11	5	58	139	147	58	13	

Verder is gegeven een functie $f(x, y, z) = f(E)$ welke voldoet aan $\sum_E f(E) = 1$ en aan $f(E) \geq 0$ voor alle E ; dit wil zeggen dat de som van alle waarden welke $f(E)$ aanneemt gelijk 1 moet zijn. $f(E)$ stelt nl. de frequentie voor waarmee een bepaald dessin in een bepaalde breedte voorkomt.

Ten tweede is gegeven de functie $w(E)$. Wij kunnen w gemakkelijk aangeven: als $E = (x, y, z)$ dan is $w(E) = (2x + 2y + z) \cdot 0.7\%$. Dit geeft de bezuiniging aan. Wanneer men k punten selecteert zeg $E_1(x_1, y_1, z_1); i=0, \dots, k-1$; $E_0 = (0, 0, 0)$, definiëren wij de bezuiniging $B(E_0, \dots, E_{k-1})$ als volgt:

$$B(E_0, \dots, E_{k-1}) = \sum_{E \in V} f(E) \cdot w(\max\{E_1 \leq E; i=0, \dots, k-1\}).$$

Bij elk punt E kiezen wij de bezuiniging maximaal.

De vraag is dus de volgende: Hoe selecteer ik mijn punten $E_1, \dots, E_{k-1}$ zodat de $B(E_0, \dots, E_{k-1})$ maximaal wordt.

Dit nu is wiskundig een volkomen oninteressant en triviaal probleem, immers wij hebben slechts een eindig aantal mogelijkheden om bij vaste k de E 's te selecteren. Voor elk van die mogelijkheden kan de bezuiniging worden berekend en men hoeft hier slechts de grootste waarde uit op te zoeken. Dat onze sterfelijkheid hierbij in conflict kan komen met het aantal mogelijkheden doet uit mathematisch oogpunt bezien niets ter zake. Het aantal mogelijkheden voor $k=5$ is reeds 8855. Het is hier al ondoenlijk om deze methode toe te passen zonder mechanische hulpmiddelen. Voor kleinere waarden van k levert deze methode de volgende waarden.

$k=1$ (000)	besparing 0
$k=2$ (000)(200)	besparing $3296 \times 0,0007\% = 2,3072\%$
$k=3$ (000)(200)(310)	besparing $4528 \times 0,0007\% = 3,1696\%$
$k=4$ (000)(300)(210)(311)	besparing $5058 \times 0,0007\% = 3,5406\%$
$k=5$ (000)(200)(300)(210)(311)	besparing $5550 \times 0,0007\% = 3,885\%$

Deze waarden zijn absoluut de beste. Men ziet hieruit dat men niet eenvoudig weg als volgt te werk kan gaan.

Bepaal het beste tweetal; dat is de beste kiezen uit 23 mogelijkheden. Zoek bij dit 2-tal een 3e punt zodat het resultaat zo goed mogelijk wordt; de beste kiezen uit 22 mogelijkheden enz. Dit zou zeer snel tot een beslissing leiden voor alle waarden van k , hoe hoger k wordt, hoe minder het werk. Men zou deze methode wat kunnen verscherpen door van een gevonden k -tal na te gaan of dit soms te verbeteren valt door voor 1 punt een ander te kiezen. Wij vinden zo dus een k -tal dat in zekere zin optimaal is. Wij mogen niet verwachten dat dit maximaal is, daar er voor bepaalde waarden van k verschillende optimale systemen bestaan. Met deze methode zijn de volgende optimale k -tallen gevonden.

$k=6$ (000)(200)(300)(110)(211)(311)

besparing $5809 \times 0.007\% = 4,0663\%$

$k=7$ (000)(200)(300)(400)(110)(211)(311)

besparing $6013 \times 0.007\% = 4,2091\%$

$k=8$ (000)(200)(300)(400)(110)(310)(211)(311)

besparing $6161 \times 0.007\% = 4,2527\%$

$k=9$ (000)(200)(300)(400)(110)(310)(211)(311)(411)

besparing $6303 \times 0.007\% = 4,4121\%$

$k=10$ (000)(100)(200)(300)(400)(110)(310)(211)(311)(411)

besparing $6465 \times 0.007\% = 4,5255\%$

De maximale besparing (24 rollen) is 4,7908%.

De meeste van deze resultaten zijn berekend door de elektronische rekenmachine ARRA. Tot $k=5$ heeft deze alle mogelijkheden geprobeerd en voor hogere waarden is de strategie gevolgd welke tot optimale stelsels leidt in de boven beschreven zin. De rekenmachine had een dussdanig programma dat het indrukken van een k -tal uit 24 knoppen correspondeerde met het selecteren van de overeenkomstige k punten. De machine typt dan na enkele seconden de bezuiniging uit en geeft tevens een lijstje van de bezuinigingen welke zouden worden verkregen wanneer elk der overigen, niet gebruikte punten, zouden worden toegevoegd. Men kan daaruit dus meteen de beste vinden. In verband met het ontstellende aantal mogelijkheden heeft dit voor deze lage waarden zelfs een aanzienlijk aantal machine-uren gevergd.

Wij zijn van mening dat het ondoenlijk is om langs theoretische weg een methode te vinden waarbij na een betrekkelijk gering tal bewerkingen een optimaal k -tal kan worden gevonden. Zelfs neer wij de $f(k)$ voor alle punten gelijk nemen, zodat m.a.w. breedten en dessins dezelfde frequentie hebben, zelfs dan het probleem theoretisch niet eenvoudiger. Ernstig zoeken

richting is tot nu toe vruchteloos gebleken. Dit kan evenwel toch als een voorlopig rapport worden beschouwd, daar de mogelijkheid bestaat om dit probleem te programmeren voor de ARNAC. Dit is de nieuwe elektronische rekenmachine van het Mathematisch Centrum, welke over meerdere mogelijkheden beschikt dan de ARRA en bovendien ca 20x zo snel werkt. Het is mogelijk dat deze machine in enkele uren alle gevallen tot $k=10$ door kan nemen. Dit zou dus een voor de praktijk volkomen bevredigende oplossing geven.

Voor het programma dat de ARRA uitgevoerd heeft zie cursus Programmeren voor automatische rekenmachines, door Prof.Dr Ir A. van Wijngaarden en E.W. Dijkstra.

Prof.Dr Ir A. van Wijngaarden
J. Verhoeff